

УДК 517.546

## О НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ КОНФОРМНЫМ РАДИУСОМ

*А.Н. Ахметова, А.В. Хмельницкая*

### Аннотация

В статье приведены результаты о свойствах поверхности конформного радиуса, построенной над единичным кругом или его внешностью, для области с выпуклой границей, содержащей прямолинейный участок. Изучены свойства поверхности конформного радиуса, построенной над полуплоскостью, для области с полигональными границами. Исследованы поверхности преобразованных конформных радиусов.

**Ключевые слова:** конформный радиус, поверхность конформного радиуса, выпуклая область, выпуклый многоугольник, коэффициент гиперболической метрики.

---

Пусть  $D$  – некоторая односвязная область плоскости  $z$ , имеющая более одной граничной точки. Конформным (или внутренним) радиусом области  $D$  относительно точки  $z_0 \in D$  называется величина  $R = R(D, z_0)$ , равная радиусу круга  $|w| < R$ , являющегося конформным образом области  $D$  в результате действия функции  $w = F(z) : F(z_0) = 0, F'(z_0) = 1$ .

Для вычисления конформного радиуса односвязной области  $D$  в точке  $z$  обычно пользуются формулой [1]

$$R(D, z) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2), \quad (1)$$

где  $z = f(\zeta)$  – функция, реализующая конформное отображение единичного круга  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$  на область  $D = f(E)$ . При этом выражение (1) описывает поверхность  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^3$  над областью  $D$  или кругом  $E$ .

Иногда при построении конформного радиуса для области  $D$  вместо  $E$  в качестве канонической области могут быть выбраны внешность  $E^-$  единичного круга  $E$  или полуплоскость. Формула для вычисления конформного радиуса при этом изменится, хотя геометрический смысл полностью сохранится. Для областей с бесконечно удаленной точкой на границе или внутри области конформный радиус в соответствующей точке определяется предельным переходом в общей формуле вида (1).

В первой части настоящей статьи, являющейся продолжением [2] и [3], доказано, что поверхность конформного радиуса для области с выпуклой границей, включающей прямолинейный участок, теряет свойство выпуклости при построении над единичным кругом  $E$  или над внешностью  $E^-$  единичного круга  $E$ . Для многоугольных криволинейных областей получены обобщения этих утверждений (под многоугольной криволинейной областью будем понимать область, полученную после замены границ прямолинейного многоугольника простыми выпуклыми кривыми).

Кроме того, изучены свойства поверхности конформного радиуса

$$R(D, z) = 2 \operatorname{Im} \zeta \cdot |f'(\zeta)| = 2 \operatorname{Im} \zeta \prod_{k=1}^n |\zeta - a_k|^{\alpha_k - 1}, \quad D = f(P), \quad P = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}, \quad (2)$$

для областей с полигональными границами при выборе полуплоскости  $P$  в качестве канонической области.

Вторая часть статьи связана с исследованием поверхностей, описываемых функциями  $e^{R(z)}$ ,  $R^n(z)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и других, где  $R(z)$  – конформный радиус. Получено обобщение свойств поверхностей преобразованных конформных радиусов.

**1.** Рассмотрим регулярную в круге  $E$  функцию  $f(\zeta) = c_0 + \zeta + c_2\zeta^2 + \dots$ , однолистно отображающую  $E$  на внутренность  $D$  выпуклой линии  $L$ . Представление

$$f'(\zeta) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 - e^{-i\theta} \zeta) d\alpha(\theta) \right\} d\zeta, \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 0, \quad (3)$$

определяет весь класс выпуклых функций  $f$  (аналогично [4, с. 507]). Здесь монотонно возрастающая функция  $\alpha(\theta)$  определяется в своих точках непрерывности как

$$\alpha(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \alpha(r, \theta),$$

где

$$\alpha(r, \theta) = \theta + \frac{\pi}{2} + \arg f'(re^{i\theta}), \quad L_r = f(re^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < r < 1.$$

Справедлива

**Теорема 1.** Поверхность  $\Omega^+$  конформного радиуса для выпуклой области  $D$  с прямолинейным участком границы  $l \subset \partial D$ , построенная над  $E$ , не является поверхностью, выпуклой вверх.

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать образ точки  $\zeta = 1$  лежащим на прямолинейном участке границы области  $D$  так, что дуга  $\gamma_\varepsilon \subset \partial E$ , содержащая  $\zeta = 1$  и соединяющая точки  $e^{-i\varepsilon}$  и  $e^{i\varepsilon}$ , будет переходить в некоторый прямолинейный участок границы  $f(\gamma_\varepsilon) \subset l \subset \partial D$  (см. рис. 1). Исходя из принципа симметрии, продолжим функцию  $f$  через дугу  $\gamma_\varepsilon$  в окрестность  $B_{\tilde{\varepsilon}} = \{|\zeta - 1| < \tilde{\varepsilon}\}$ . После этого  $\zeta = 1$  становится точкой аналитичности продолженной функции, которую обозначим также через  $f$ .

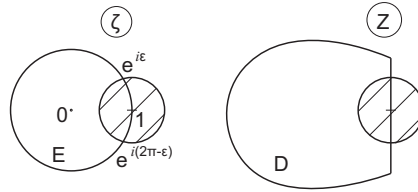


Рис. 1

Поскольку на дуге  $\gamma_\varepsilon$  функция  $\alpha(\theta) = \text{const}$ , то достаточно рассмотреть  $\theta$  на отрезке  $\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon$ .

Выражение для конформного радиуса при  $\zeta = \xi$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ , запишется в виде  $R(\xi) = |f'(\xi)|(1 - \xi^2)$ , причем

$$|f'(\xi)| = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \ln(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2) d\alpha(\theta) \right\}. \quad (4)$$

Тогда

$$R'(\xi) = (1 - \xi^2)|f'(\xi)|'_\xi - 2\xi|f'(\xi)|,$$

и поэтому  $R'(1) = -2|f'(\xi)|_{\xi=1} < 0$ , поскольку  $f'(1) \neq 0$  в силу необходимого условия однолистности функции  $f$ .

Далее,

$$R''(\xi) = (1 - \xi^2)|f'(\xi)|_{\xi}'' - 4\xi|f'(\xi)|_{\xi}' - 2|f'(\xi)|.$$

Поскольку подынтегральная функция в выражении (4) не имеет логарифмической особенности, дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получаем

$$|f'(\xi)|_{\xi}' = |f'(\xi)| \cdot \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{2\xi - 2\cos\theta}{1 - 2\xi\cos\theta + \xi^2} d\alpha(\theta) \right).$$

В силу равенства

$$|f'(\xi)|_{\xi}'|_{\xi=1} = -|f'(\xi)|_{\xi=1}$$

окончательно имеем

$$R''(1) = 2|f'(\xi)|_{\xi=1} > 0.$$

Так как функция  $f$  аналитична в  $B_{\varepsilon}$ , то  $R''(\xi) > 0$  в  $B_{\varepsilon}$ . Следовательно, на поверхности конформного радиуса имеется невыпуклая вверх кривая  $R(\xi)$ , образованная рассечением этой поверхности плоскостью, перпендикулярной плоскости круга  $E$ . Это означает, что поверхность конформного радиуса, построенная над  $E$ , не является выпуклой вверх.  $\square$

Отметим, что теорема верна и для выпуклых многоугольников как частного случая областей с прямолинейным участком границы.

Приведем некоторое обобщение теоремы 1 для выпуклых криволинейных многоугольников. В качестве отображающей функции рассмотрим интеграл Кристоффеля–Шварца

$$f(\zeta) = \int_0^{\zeta} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta, \quad \zeta \in E, \quad a_k = e^{i\varphi_k}, \quad (5)$$

с условием

$$n - 2 < \sum_{k=1}^n \alpha_k < n - 1, \quad 0 < \alpha_k \leq 1. \quad (6)$$

Справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $D$  – выпуклый криволинейный многоугольник, соответствующий интегральному представлению (5) с условием (6). Поверхность  $\Omega^+$  конформного радиуса для области  $D$ , построенная над кругом, не является поверхностью, выпуклой вверх.

**Доказательство.** Достаточно убедиться в существовании выпуклой вниз линии в вертикальном сечении поверхности конформного радиуса с уравнением

$$R(\zeta) = (1 - |\zeta|^2) \prod_{k=1}^n |\zeta - a_k|^{\alpha_k - 1}.$$

Без ограничения общности будем считать  $a_k \neq -1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

При каждом фиксированном  $t \in (-\pi/2; \pi/2)$  рассмотрим множество рассечений поверхности конформного радиуса плоскостями  $\zeta^* = -1 + re^{it}$ ,  $r > 0$ . Кривые

в сечении опишутся выражением

$$R(\zeta^*) = (2r \cos t - r^2) \prod_{k=1}^n |1 + a_k|^{\alpha_k - 1} \prod_{k=1}^n \left| 1 - r \frac{e^{it}}{1 + a_k} \right|^{\alpha_k - 1}.$$

Второй множитель в последнем соотношении не влияет на исследуемую характеристику поверхности, поэтому достаточно рассмотреть функцию

$$\Phi(r) = (2r \cos t - r^2) \prod_{k=1}^n \left| 1 - r \frac{e^{it}}{1 + a_k} \right|^{\alpha_k - 1}$$

и записать ее разложение в окрестности нуля

$$\Phi(r) = 2r \cos t - r^2 - 2r^2 \cos t \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \frac{\cos t(1 + \cos \varphi_k) + \sin t \sin \varphi_k}{2(1 + \cos \varphi_k)} + o(r^2).$$

Значение второй производной в нуле, очевидно, зависит от выбора сечения, то есть от  $t$ . Поэтому выпишем коэффициент при  $r^2$  в виде функции

$$k_2(t) = - \left( 1 + \cos t \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \frac{\cos t(1 + \cos \varphi_k) + \sin t \sin \varphi_k}{1 + \cos \varphi_k} \right), \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

Возьмем сечение при  $t = 0$ . Тогда

$$k_2(0) = - \left( 1 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \right) = n - 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

и из условия (6) легко получаем оценку  $0 < k_2(0) < 1$ , из которой вытекает справедливость утверждения.  $\square$

Перейдем к изучению свойств поверхности конформного радиуса, построенного над внешностью круга. Рассмотрим мероморфную во внешности круга  $E$  функцию  $F(\zeta) = \zeta + c_0 + c_{-1}\zeta^{-1} + c_{-2}\zeta^{-2} + \dots$ ,  $\zeta \in E^-$ , однолистно отображающую  $E^-$  на внешность  $D^-$  замкнутой выпуклой линии  $L$ .

Представление

$$F'(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{e^{i\theta}}{\zeta} \right) d\alpha(\theta) \right\}, \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 0, \quad (7)$$

определяет весь класс функций  $F$  (аналогично [4, с. 507]). Монотонно возрастающая функция  $\alpha(\theta)$  понимается здесь так же, как и ранее.

Имеет место

**Теорема 3.** *Поверхность  $\Omega^-$  конформного радиуса для внешности выпуклой области  $D$  с прямолинейным участком границы  $l \subset \partial D$ , построенная над  $E^-$ , не является поверхностью, выпуклой вниз.*

**Доказательство.** Все первоначальные соображения в доказательстве теоремы 1 будут иметь силу и в данном случае, поэтому продолжим отображающую функцию через дугу окружности так, чтобы точка  $\zeta = 1$  стала аналитической для продолженной функции.

Пусть  $\zeta = \xi$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ . Воспользуемся представлением (7) для производной

$$|F'(\xi)| = \frac{1}{\xi^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \ln(1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2) d\alpha(\theta) \right\}.$$

Тогда  $R'(\xi) = (\xi^2 - 1)|f'(\xi)|'_\xi + 2\xi|f'(\xi)|$  и  $R'(1) = 2|f'(\xi)|_{\xi=1} \geq 0$ .

Далее,

$$R''(\xi) = (\xi^2 - 1)|f'(\xi)|''_{\xi} + 4\xi|f'(\xi)|'_\xi + 2|f'(\xi)|. \quad (8)$$

Поскольку

$$|F'(\xi)|'_\xi = |F'(\xi)| \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{2\xi - 2\cos \theta}{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2} d\alpha(\theta) - \frac{2}{\xi} \right),$$

то  $|F'(\xi)|'_\xi|_{\xi=1} = -|F'(\xi)|_{\xi=1}$ , и следовательно,

$$R''(1) = -2|F'(\xi)|_{\xi=1} < 0.$$

Поскольку функция  $F$  аналитична в  $B_{\varepsilon}$ , то  $R''(\xi) < 0$  в  $B_{\varepsilon}$ . Следовательно, на поверхности конформного радиуса имеется невыпуклая вниз кривая  $R(\xi)$ , образованная рассечением этой поверхности плоскостью, перпендикулярной плоскости круга.  $\square$

Заменяя прямолинейные границы многоугольника выпуклыми кривыми, получим некоторое обобщение теоремы 3. В качестве отображающей функции рассмотрим интеграл Кристоффеля – Шварца

$$F(\zeta) = \int_1^{\zeta} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\beta_k - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2}, \quad \zeta \in E^-, \quad a_k = e^{i\varphi_k}, \quad (9)$$

с условием

$$n \leq \sum_{k=1}^n \beta_k < n + 2, \quad 1 \leq \beta_k < 2. \quad (10)$$

Справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $D^-$  – внешность выпуклого криволинейного многоугольника, соответствующая интегральному представлению (9) с условием (10). Поверхность  $\Omega^-$  конформного радиуса для  $D^-$ , построенная над внешностью круга, не является поверхностью, выпуклой вниз.

**Доказательство.** Поверхность конформного радиуса описывается функцией

$$R(\zeta) = (|\zeta|^2 - 1) \frac{1}{|\zeta|^2} \prod_{k=1}^n |\zeta - a_k|^{\beta_k - 1}.$$

Без ограничения общности полагаем  $a_k \neq -1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . При каждом фиксированном направлении  $t \in (\pi/2; 3\pi/2)$  рассмотрим множество рассечений поверхности конформного радиуса плоскостями  $\zeta^* = -1 + re^{it}$ ,  $r > 0$ . Кривые, образованные в сечении, опишутся выражением

$$R(\zeta^*) = \frac{r^2 - 2r \cos t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \prod_{k=1}^n |1 + a_k|^{\beta_k - 1} \prod_{k=1}^n \left| 1 - r \frac{e^{it}}{1 + a_k} \right|^{\beta_k - 1}.$$

Второй множитель не влияет на интересующую нас характеристику поверхности. Поэтому рассмотрим функцию

$$\Phi(r) = \frac{r^2 - 2r \cos t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \prod_{k=1}^n \left| 1 - r \frac{e^{it}}{1 + a_k} \right|^{\beta_k - 1}$$

и запишем ее разложение в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \Phi(r) = & -2r \cos t + r^2 - 4r^2 \cos^2 t + \\ & + 2r^2 \cos t \sum_{k=1}^n (\beta_k - 1) \frac{\cos t(1 + \cos \varphi_k) + \sin t \sin \varphi_k}{2(1 + \cos \varphi_k)} + o(r^2). \end{aligned}$$

Значение второй производной в нуле вновь зависит от выбора сечения, то есть от  $t$ . Поэтому выпишем коэффициент при  $r^2$  в виде функции

$$k_2(t) = 1 - 4 \cos^2 t + \cos t \sum_{k=1}^n (\beta_k - 1) \frac{\cos t(1 + \cos \varphi_k) + \sin t \sin \varphi_k}{1 + \cos \varphi_k}, \quad t \in \left( \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right).$$

Возьмем сечение при  $t = \pi$ . Тогда

$$k_2(\pi) = -3 - n + \sum_{k=1}^n \beta_k.$$

Используя ограничение сверху из (10) для  $\sum_{k=1}^n \beta_k$ , получим

$$k_2(\pi) = -3 - n + \sum_{k=1}^n \beta_k < -1.$$

Следовательно, поверхность не может быть выпуклой вниз.  $\square$

Теперь установим аналогичные утверждения в случае построения поверхности конформного радиуса над полуплоскостью  $P$ .

**Теорема 5.** *Поверхность  $\Omega^+$  конформного радиуса для любого выпуклого прямолинейного многоугольника, построенная над полуплоскостью, не является поверхностью, выпуклой вверх.*

**Доказательство.** Интеграл Кристоффеля–Шварца для выпуклого прямолинейного  $n$ -угольника имеет вид

$$f(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta, \quad \zeta \in P, \quad \operatorname{Im} \zeta_0 > 0,$$

где действительные числа  $a_k$  и  $\alpha_k$  удовлетворяют условиям

$$-\infty < a_1 < \dots < a_n < +\infty, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2, \quad 0 < \alpha_k \leq 1.$$

Рассмотрим рассечение поверхности конформного радиуса при  $\zeta^* = x + iy$ , когда  $x = 0$ , то есть при  $\zeta^* = iy$ . В сечении получим кривую с уравнением

$$R(\zeta^*) = 2y \prod_{k=1}^n |iy - a_k|^{\alpha_k - 1} = 2\Phi(y).$$

Тогда

$$\Phi(y) = y \prod_{k=1}^n |iy - a_k|^{\alpha_k - 1} = y^{1 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1)} \prod_{k=1}^n \left| i - \frac{a_k}{y} \right|^{\alpha_k - 1} \sim Cy^{-1}, \quad y \rightarrow \infty, \quad C > 0. \quad (11)$$

Очевидно, в полукрестности бесконечно удаленной точки (лежащей в полуплоскости  $P$ ) в указанном сечении функция  $\Phi(y)$  является выпуклой вниз, откуда следует справедливость утверждения.  $\square$

**Замечание 1.** Утверждение теоремы 5 остается справедливым и в случае конечного прямолинейного  $(n+1)$ -угольника, когда прообразом  $(n+1)$ -й вершины является бесконечно удаленная точка.

Интеграл Кристоффеля–Шварца для выпуклого  $(n+1)$ -угольника имеет тот же вид, но  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n-2$ . Дополнительная вершина  $f(\infty)$  оказывается конечной, если  $\sum_{k=1}^n \alpha_k < n-1$ . Рассмотрим два случая. Если  $\sum_{k=1}^n \alpha_k < n-2$ , то есть  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n-2-\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , то при учете этого условия в (11) получим

$$\Phi(y) = y^{1+n-2-\varepsilon-n} \prod_{k=1}^n \left| i - \frac{a_k}{y} \right|^{\alpha_k - 1} \sim Cy^{-1-\varepsilon}, \quad y \rightarrow \infty, \quad C > 0.$$

Если  $n-2 < \sum_{k=1}^n \alpha_k < n-1$ ,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n-2+\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , то в (11) получим

$$\Phi(y) = y^{1+n-2+\varepsilon-n} \prod_{k=1}^n \left| i - \frac{a_k}{y} \right|^{\alpha_k - 1} \sim Cy^{-1+\varepsilon}, \quad y \rightarrow \infty, \quad C > 0.$$

В обоих случаях в окрестности бесконечно удаленной точки в указанном сечении функции являются выпуклыми вниз.

**Замечание 2.** Для области, соответствующей представлению (7), поверхность конформного радиуса, построенная над полуплоскостью, не будет ни выпуклой вверх, ни выпуклой вниз.

## 2. Рассмотрим отображение

$$\Phi = \Phi(z) = \Psi[R(z)], \quad (12)$$

являющееся суперпозицией некоторой вещественной аналитической функции  $\Psi$  и конформного радиуса  $R(z) = R(D, z) \equiv R$ ,  $R \geq 0$ . При этом каждой точке  $z_0 = f(\zeta_0) \in D$  поставим в соответствие точку с пространственной координатой  $\Psi[R(z_0)]$  на поверхности с уравнением (12). Будем исследовать связь выпуклости введенной поверхности с выпуклостью поверхности конформного радиуса. Имеет место следующий факт. Если  $\Psi'(R) \geq 0$ ,  $\Psi''(R) < 0$ ,  $R \geq 0$ , и поверхность конформного радиуса над областью  $D$  выпукла вверх, то поверхность с уравнением (12) также выпукла вверх. Имеются и другие связи между рассматриваемыми поверхностями, которые мы оформим в виде таблицы (одна строка таблицы будет представлять одно самостоятельное утверждение). Для указания выпуклости вверх и вниз будем использовать символы  $\frown$  и  $\smile$  соответственно. Имеет место

**Теорема 6.** Для поверхности, заданной уравнением (12) и построенной над областью  $D$ , справедливы утверждения, представленные в виде следующей таблицы:

$\Psi'(R)$	$\Psi''(R)$	$R(z)$		$\Psi[R(z)]$
$\geq 0$	$\leq 0$	$($	$\Rightarrow$	$($
		$)$	$\Leftarrow$	$)$
	$\geq 0$	$($	$\Rightarrow$	$($
		$)$	$\Leftarrow$	$)$
$\leq 0$	$\leq 0$	$($	$\Rightarrow$	$)$
		$)$	$\Leftarrow$	$($
	$\geq 0$	$($	$\Rightarrow$	$)$
		$)$	$\Leftarrow$	$($

**Доказательство.** Приведем его для одного случая, справедливость остальных доказывается аналогично. Выпишем необходимые производные

$$\Psi_{zz} = \Psi''R_z^2 + \Psi'R_{zz}, \quad \Psi_{z\bar{z}} = \Psi''|R_z|^2 + \Psi'R_{z\bar{z}}.$$

Пусть  $\Psi'(R) \leq 0$ ,  $\Psi''(R) \leq 0$  (третий случай в таблице). Для доказательства первой импликации предполагаем, что  $|R_{zz}| \leq R_{z\bar{z}}$ , то есть  $R(z)$  выпукла вниз. Тогда оценим

$$|\Psi_{zz}| \leq |\Psi''||R_z|^2 + |\Psi'|R_{zz} \leq -\Psi''|R_z|^2 - \Psi'R_{zz} = -\Psi_{z\bar{z}} \Rightarrow |\Psi_{zz}| \leq -\Psi_{z\bar{z}}.$$

Следовательно, поверхность  $\Psi[R(z)]$  выпукла вверх.

Для доказательства второй импликации предполагаем, что  $|\Psi_{zz}| \leq \Psi_{z\bar{z}}$ . Тогда

$$\Psi''|R_z|^2 + \Psi'R_{z\bar{z}} \geq |\Psi''R_z^2 + \Psi'R_{zz}| \geq |\Psi''||R_{zz}| - |\Psi''||R_z|^2 = -\Psi''|R_{zz}| + \Psi''|R_z|^2.$$

Отсюда

$$-\Psi''|R_{zz}| \leq \Psi'R_{z\bar{z}} \Rightarrow |R_{zz}| \leq -R_{z\bar{z}}.$$

Итак, поверхность  $R(z)$  выпукла вверх.  $\square$

В частности, для коэффициента гиперболической метрики  $\lambda = 1/R(z)$  из выпуклости вверх поверхности  $R(z)$  следует выпуклость вниз поверхности  $\Psi(R(z))$ , а из выпуклости вверх поверхности  $\Psi(R(z)) = 1/R(z)$  – выпуклость вниз поверхности  $R(z)$ .

**Замечание 3.** Невыполнение обратных импликаций при преобразовании поверхности связано с возможным (но не обязательным) появлением на ней седловых точек и только их.

Действительно, пусть поверхность  $\Psi[R(z)]$  выпукла вверх, то есть  $|\Psi_{zz}| \leq -\Psi_{z\bar{z}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} -\Psi''|R_z|^2 - \Psi'R_{z\bar{z}} &\geq |\Psi''R_z^2 + \Psi'R_{zz}| \geq \\ &\geq |\Psi''||R_z|^2 - |\Psi''||R_{zz}| = -\Psi''|R_z|^2 + \Psi'|R_{zz}|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Psi'|R_{zz}| \leq -\Psi'R_{z\bar{z}} \Rightarrow |R_{zz}| \geq -R_{z\bar{z}},$$

и поверхность  $R(z)$  не может быть выпуклой вверх.



Теперь предполагаем, что поверхность  $R(z)$  выпукла вверх и выполняется соотношение  $|R_{zz}| \leq -R_{z\bar{z}} \Rightarrow -|R_{zz}| \geq R_{z\bar{z}}$ . Тогда оценим

$$|\Psi_{zz}| \geq |\Psi''||R_z|^2 - |\Psi'||R_{zz}| \geq |\Psi''||R_z|^2 + |\Psi'|R_{z\bar{z}} = -\Psi''|R_z|^2 - \Psi'R_{z\bar{z}} = -\Psi_{z\bar{z}} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\Psi_{zz}| \geq -\Psi_{z\bar{z}}.$$

Поэтому поверхность  $\Psi[R(z)]$  не может быть выпуклой вверх.

Для остальных случаев в таблице доказательства аналогичны изложенным.

Распространяя понятие конформного радиуса на неодносвязный случай [5], построим пример, для которого будет справедливо утверждение теоремы 6. Рассмотрим конформный радиус

$$R(D, z) = -2|z| \ln |z|$$

для области  $D = f(E) = \{0 < |z| < 1\}$  с функцией

$$z = f(\zeta) = \exp \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \quad \zeta \in E.$$

Поверхность конформного радиуса  $R(D, z)$  состоит из двух частей [2]: над кольцом  $0 < |z| < e^{-1}$  поверхность состоит из седловых точек, а над кольцом  $e^{-1} < |z| < 1$  поверхность является выпуклой вверх.

Возьмем функцию

$$\Psi[R(z)] = \cos \left( \frac{e\pi R}{4} \right) = \cos \left( \frac{\pi e}{2} |z| \ln |z| \right), \quad 0 < |z| < 1.$$

Нетрудно проверить, что поверхность  $\Phi = \Psi[R(z)]$  состоит из четырех частей: над кольцом  $\{0 < |z| < \rho_1\}$  она является выпуклой вверх, над кольцом  $\{e^{-1} < |z| < \rho_2\}$  – выпуклой вниз, над кольцами  $\{\rho_1 < |z| < e^{-1}\}$  и  $\{\rho_2 < |z| < 1\}$  состоит из седловых точек.

### Summary

*A.N. Akhmetova, A.V. Khmel'nitskaya.* On Some Surfaces Defined by Conformal Radius.

In this paper, we study the properties of the conformal radius surface constructed over a unit disk or over the exterior of a unit disk for a domain with a convex boundary curve containing rectilinear part. We also discuss the properties of the conformal radius surface constructed over a half-plane for a domain with a polygonal boundary curve as well as the properties of the surface of the reconstructed conformal radius.

**Key words:** conformal radius, surface of the conformal radius, convex domain, convex polygon, coefficient of the hyperbolic metric.

### Литература

1. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen // Compositio Mathematica. – 1951. – Т. 8. – Р. 81–111.
2. *Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н., Хмельницкая А.В.* Свойства поверхностей конформного радиуса для интегралов Кристоффеля–Шварца // Материалы Седьмой международ. казан. шк.-конф. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2005. – С. 10–11.
3. *Аксентьев Л.А., Ахметова А.Н., Хмельницкая А.В.* О выпуклости поверхностей, определяемых конформным радиусом плоской области // Изв. вузов. Матем. – 2007. – № 4. – С. 10–20.

4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
5. *Хейман В.К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

Поступила в редакцию  
06.03.09  
Переработанный вариант  
19.10.11

---

**Ахметова Альбина Наилевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: *achmetowa@inbox.ru*

**Хмельницкая Алена Владимировна** – старший преподаватель кафедры математики и механики филиала Казанского (Приволжского) федерального университета в г. Зеленодольск.